30/11/2016

Ορισμος

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad +\infty$ σ.σ. του A $\quad \ell \in \mathbb{R}$

α) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 \ \forall x \in A$ αν $x > M$ τοτε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

β) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall N > 0 \ \exists M > 0 \ \forall x \in A$ αν $x > M$ τοτε $f(x) > N$

γ) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall N > 0 \ \exists M > 0 \ \forall x \in A$ αν $x > M$ τοτε $f(x) < -N$

Αν $-\infty$ ειναι σ.σ του A με ομοιο τροπο οριζονται τοτε τα

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{matrix} \ell \\ \text{ή} \\ +\infty \\ \text{ή} \\ -\infty \end{matrix}$$

Παραδειγματα

α) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ Αποδ. Εστω $\varepsilon > 0$

(Αναζητουμε $M > 0$ ωστε $x > M \Rightarrow |\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$)

Θετουμε $M = \frac{1}{\varepsilon}$ Για καθε x με $x > M$ ισχυει $|\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$

Επομενως $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Απ. Έστω $N>0$

(αναζητούμε $M>0$ ώστε $x>M \Rightarrow \sqrt{x}>N$)

Θέτοντας $M=N^2$ έχουμε

$x>M=N^2 \Rightarrow \sqrt{x}>N$

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Θεώρημα (αρχή μεταφοράς για όρια)

(χαρακτηρισμός ορίων μέσω ακολουθιών)

Έστω $f: A\to\mathbb{R}$ x_0 σσ. του A $\left(\begin{matrix} x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\} \\ \ell\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}\end{matrix}\right)$

Τ.Α.Ε.Ι (i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$

(ii) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n\neq x_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και $x_n\to x_0$ ισχύει $f(x_n)\to\ell$

Αποδ.

Αν $x_0\in\mathbb{R}$ $\ell\in\mathbb{R}$

η απόδειξη είναι παρόμοια με την αντίστοιχη της αρχής μεταφοράς για συνέχεια συναρτήσεων. Στις άλλες περιπτώσεις προσαρμόζεται

Το θεώρημα αυτό χρησιμοποιείται με τρεις τρόπους

α) Για να δ.ο. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$

αρκεί (σύμφωνα με το θεώρημα) ν.δ.ο. για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο π.ο. της f με $x_n \to x_0$ και $x_n \neq x_0$ $\forall n$ ισχυει $f(x_n) \to \ell$

β) Για να δείξουμε οτι η $f(x)$ δεν τείνει στο ℓ αρκεί να βρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο π.ο. της f ωστε $x_n \neq x_0$ $\forall n$, $x_n \to x_0$ και $f(x_n) \not\to \ell$

γ) Για να δείξουμε οτι η f δεν έχει οριο καθως το x τείνει στο x_0 αρκεί να βρουμε δυο ακολουθιες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο π.ο. της f ωστε $x_n \neq x_0$, $y_n \neq x_0$ $\forall n$

$x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$

$f(x_n) \to \ell_1$, $f(y_n) \to \ell_2$ με $\ell_1 \neq \ell_2$

Παραδείγματα

Να δειχθεί οτι δεν υπάρχουν τα εξής ορια

α) $\lim_{x\to+\infty} \sin x$

Εχουμε $2n\pi \to +\infty$

$2n\pi + \frac{\pi}{2} \to +\infty$

$\sin(2n\pi) = 0 \to 0$ Αρα δεν υπάρχει το όριο
$\sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \to 1$. $\lim_{x\to+\infty} \sin x$

β) $\lim_{x\to+\infty} \cos x$

$2n\pi \to +\infty$ $\cos(2n\pi) = 1 \to 1$
$2n\pi + \frac{\pi}{2} \to +\infty$ $\cos(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0 \to 0$ ≠

άρα το όριο $\lim_{x\to+\infty} \cos x$ δεν υπαρχει

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$

Θέτουμε $x_n = -2n\pi$

$y_n = -2n\pi + \frac{\pi}{2}$

$x_n \to -\infty$

$y_n \to -\infty$

$\sin(x_n) = 0 \to 0$ Άρα το όριο $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$ δεν υπάρχει.

$\sin(y_n) = 1 \to 1$

δ) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ (ομοίως)

(ε) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Θέτουμε $x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0$

$y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0$ $x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$ $\forall n$

$\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin(2n\pi) = 0 \to 0$

$\neq$

$\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = \sin(2n\pi + \pi/2) = 1 \to 1$

Άρα δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(στ) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0$

$y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0$

$\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cos(2n\pi) = 1 \to 1$ Άρα δεν υπάρχει το όριο

$\neq$

$\cos\left(\frac{1}{y_n}\right) = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \to 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

$x_n = \frac{1}{n}$

$y_n = -\frac{1}{n}$

$x_n \to 0 \quad x_n \neq 0 \quad \forall n \quad \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \to +\infty$

$y_n \to 0 \quad y_n \neq 0 \quad \forall n \quad \frac{1}{y_n} = \frac{1}{-\frac{1}{n}} = -n \to -\infty$

$+\infty \neq -\infty$

Άρα δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

(4) $f(x) = \sin\left(\frac{4}{x}\right)$

N.δ.ο. δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$

Θεωρούμε

$x_n = \frac{4}{2n\pi}$

$y_n = \frac{4}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$

(Πρέπει $\frac{4}{y_n} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $\frac{4}{x_n} = 2n\pi$)

$x_n \to 0$

$y_n \to 0$

$f(x_n) = \sin\left(\frac{4}{x_n}\right) = \sin\left(\frac{4}{\frac{4}{2n\pi}}\right) = \sin(2n\pi) = 0 \to 0$

$f(y_n) = \sin\left(\frac{4}{y_n}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$

Άρα δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$

Αντίστοιχο Θεώρημα ισχύει για τα πλευρικά όρια

→ Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A από τα δεξιά

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \iff$ Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n > x_0$ $\forall n$ και $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to \ell$

→ Εστω $f: A \to \mathbb{R}$ x_0 σ.σ. του A απο τα αριστερα

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \iff$ Για καθε ακολουθια $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n < x_0$ $\forall n$ και $x_n \to x_0$ ισχυει $f(x_n) \to l$

Παρ. Να δειχθει οτι δεν υπαρχει το οριο

$\lim_{x \to 0^-} \underset{f(x)}{\underbrace{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}}$

Θετουμε $x_n = -\frac{1}{n\pi}$

$x_n < 0$ $\quad y_n = -\frac{1}{n\pi + \pi/4}$

$y_n < 0$ $\quad x_n \to 0$

$y_n \to 0$

$f(x_n) = \sin\left(\frac{2}{x_n}\right) = \sin(-2n\pi) = 0 \to 0$

$\neq$

$f(y_n) = \sin\left(\frac{2}{y_n}\right) = \sin\left(-\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = -1 \to -1$

Αρα δεν υπαρχει το οριο $\lim_{x \to 0^-} f(x)$

Προτασυ (Αλγεβρα οριων).

Εστω f, g $A \to \mathbb{R}$ x_0 σ.σ. του A

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$l, m \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = m$

Τοτε α) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + m$

β) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$

δ) Αν $g(x) \neq 0$ $\forall x \in A$ και $m \neq 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

Απόδ.

Προκύπτει εύκολα με χρήση του θεωρήματος που χαρακτηρίζει τα όρια μέσω ακολουθιών

Πρόταση

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$.

$x_0 \in \mathbb{R}$ σσ του A ώστε $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $l \in \mathbb{R}$

$g: B \to \mathbb{R}$ $f(A) \subseteq B$

$l \in B$ και g συνεχής στο σημείο l

Τότε $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(l)$

Απόδειξη

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο A με $x_n \neq x_0$ $\forall n$ και $x_n \to x_0$

Εφόσον $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

από το χαρακτηρισμό των ορίων με ακολουθίες προκύπτει ότι $f(x_n) \to l$

Εφόσον η συνάρτηση g είναι συνεχής στο l

προκύπτει ότι $g(f(x_n)) \to g(l)$

Επομένως $\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x_n) = g(l)$

Εφαρμογή

Αν ξέρουμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Τότε εφόσον η εκθετική είναι συνεχής

$\lim_{x \to x_0} e^{f(x)} = e^{l}$

Εφόσον οι τριγωνομετρικές είναι συνεχείς

$\lim_{x \to x_0} \sin(f(x)) = \sin(l)$ $\lim_{x \to x_0} \cos(f(x)) = \cos(l)$

→ Εστω $f: A \to \mathbb{R}$, και $x_0 \in \mathbb{R}$ σ.σ του A και από τα δεξιά
και από τα αριστερά. Τότε
Υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ⟺ Υπάρχουν τα όρια
$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ και $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ και είναι ίσα μεταξύ τους.

Πρ.

Αν f, g, h $A \to \mathbb{R}$. x_0 σσ. του A

$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$

Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = l = \lim_{x \to x_0} h(x)$

Τότε $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

Αποδ.
Εστω $\varepsilon > 0$
Εφόσον $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $\exists \delta_1 > 0$
$\forall x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta_1$ $|f(x) - l| < \varepsilon$
δηλ. $l - \varepsilon < f(x) < \varepsilon$

Εφόσον $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$ $\exists \delta_2 > 0$
ώστε $\forall x \in A$ $0 < |x - x_0| < \delta_2$ $|h(x) - l| < \varepsilon$
δηλ $l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$

Θέτοντας $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$
για $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$
$l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$

Επομένως $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$ διηλ. $|g(x) - l| < \varepsilon$

Βασικό όριο $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Απ.

Για $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

Εφόσον $\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$ $\lim_{x \to 0^+} 1 = 1$

Εχουμε $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x) \quad \forall x \neq 0$

Εφόσον η συνάρτηση

Για $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

$0 < -x < \frac{\pi}{2}$

άρα $\cos x < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$

Άρα όπως πριν $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$

Παρατ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7\cancel{x}}{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5\cancel{x}}$$

Εχουμε $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$

$= \frac{7}{5}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1$

Παρ.

Να υπολογιστούν τα όρια

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

α' τρόπος

$$= \lim \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \lim \frac{\cos^2 x - 1}{x(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{1+\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

β' τρόπος

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(2\frac{x}{2}\right) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\sin^2\frac{x}{2} - 1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \left(-\frac{\sin x}{2}\right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Βασικά όρια $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Βήμα 1 $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Αν $k = [x]$

$k \leq x \leq k+1$

$$\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

~~Εφόσον~~ Εφόσον $\lim \left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1} = e$

Έστω $\varepsilon > 0$

$\exists u_0 \in \mathbb{N}$ Εφόσον $\lim \left(1+\frac{1}{u+1}\right)^{u} = e$

ώστε $\forall u \in \mathbb{N}$ με $u \ge u_0$ $\left|\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1} - e\right| < \varepsilon$

$\left|\left(1+\frac{1}{u+1}\right)^{u} - e\right| < \varepsilon$

Για $x \ge u_0$

ισχύει $[x] \ge u_0$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e+\varepsilon$$

άρα

$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} - e\right| < \varepsilon$

Βήμα 2

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = e$

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x}$$

$$= \left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}}_{\substack{\downarrow x\to+\infty \\ e}} \underbrace{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)}_{\substack{\downarrow \\ 1}}$$

από Βήμα 1

$\xrightarrow{x\to+\infty} e$

Βήμα 3

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ (από Βήμα 2)

Βημα 4

$\lim_{t\to 0^+}(1+t)^{1/t}=e$, $\lim_{x\to 0^-}(1+t)^{1/t}=e$

Αποδ

Απο βήμα 1 και Βημα 3 με αλλαγή μεταβλητής
$t=\frac{1}{x}$

Αρα $\lim_{t\to 0}(1+t)^{t}=e$

Εφόσον η log είναι συνεχής

$\lim_{t\to 0}\log(1+t)^{1/t}=\log e=1.$

Αρα $\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1$

Κανοντας την αλλαγή μεταβλητής $1+t=x$
Εχουμε $\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=1$

Εφοσον η εκθετική είναι συνεχής
$\lim_{t\to 0}e^t=1$

$\lim_{t\to 0}\frac{\log e^t}{e^t-1}=1 \Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}=1 \Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$

Εστω $a>0$

$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log a}-1}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\boxed{\frac{e^{x\log a}-1}{x\log a}}\log a$

$=1\cdot\log a=\log a$

Επομένως

$$\lim_{x \to 0} x \log a = 0$$

και $$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$